

安定判別法を利用した特性根の計算方法

その他（別言語等） のタイトル	A Method for Finding the Roots of a Characteristic Equation by Applying the Stability Criteria
著者	杉岡 一郎
雑誌名	室蘭工業大学研究報告．理工編
巻	8
号	2
ページ	467-477
発行年	1974-10-15
URL	http://hdl.handle.net/10258/3605

安定判別法を利用した特性根の計算方法

杉 岡 一 郎

A Method for Finding the Roots of a Characteristic Equation by Applying the Stability Criteria

Ichiro Sugioka

Abstract

In this paper, a method for finding the roots of a characteristic equation by applying Hurwitz criterion, Schur-Cohn criterion and the theorem to determine the number of roots existing in the right-half plane of a polynomial with complex coefficients is described.

The algorithms of the method are as follows:

- (1) Find out the real parts of the roots by scanning with the imaginary axis the complex plane in which the roots exist.
- (2) In the same way, find out the imaginary parts of the roots by scanning it with the real axis.
- (3) Pick out the roots from among all the combinations of the real and the imaginary parts of the roots that are found in the above two steps.

The features of the method are as follows:

- (1) An initial guess of a root is unnecessary.
- (2) The multiplex degree of a multiple root is obtained.
- (3) It is also useful for finding the roots of a polynomial with complex coefficients by making some modifications to the algorithms.

I. 緒 言

工学のいろいろな分野において、系の特性方程式の根(特性根あるいは固有値)を求めなければならないことがしばしばある。特性根は一般に高次代数方程式であるところの特性方程式を解くことによって得られることは衆知の通りであるが、代数方程式を解析的に解くことができるのは4次までであって、5次以上の場合には一般に数値解法によって近似解を得ている。代数方程式の数値解法としては、Newton法、Bairstow法、Jarrat法等がよく利用されているが、それ等の方法には一長一短があって、電子計算機のプログラムを作る場合には、例えばBairstow法とNewtonのように一方がもつ長所で他方の短所を補なうように複数の方法が併用されることがある。またその他にもいろいろな工夫や改良^{1),2)}がされている。

さて、制御工学の分野では、Nyquist法、Routh-Hurwitz法、Bilharz-Frank法、Schur-Cohn法等の安定判別法がよく利用されている。中でも例えば、Routh-Hurwitzの安定判別法

は、系の安定、不安定の判別に利用する他に応用すれば特性根の中一番右側にある根の実数部の近似値を試行錯誤的に求めることが可能^{3),4)}である。さらに Routh-Hurwitz 法は不安定根の個数を数えることができるので、一番右側の根だけではなく他の根の実数部の近似値をも求めることができる。

本稿では以上のような点に着目して、安定根あるいは不安定根の個数を数えることができる各種の安定判別法を利用した特性根の計算方法について述べる。

この計算方法で利用している安定判別法は次の通りである。

(1) Hurwitz の安定判別法⁵⁾。

(2) Schur-Cohn の安定判別法⁶⁾。

(3) 複素係数代数方程式の根の中で右半面に存在する根の個数を数える方法⁷⁾。

この中(3)の方法は安定判別法というわけではないが、代数方程式の根の中で右半面にある根の個数について議論する方法であり、Hurwitz の安定判別法と類似しているので利用している。また以下の文中においては便宜上「判別法(3)」と呼ぶことにする。この他に Bilharz-Frank の安定度判別法も有効な方法で利用することができるがここでは利用していない。

II. 計算方法の原理と特長

1. 原 理

根の配置が Fig. 1 のような場合を例にとって計算方法の原理を簡単に説明する。

代数方程式が与えられると、その方程式の全ての根が存在する大まかな範囲が Fig. 1 に示すように原点を中心としたある半径の円の内側として決定される。また方程式に適当な変数変換をほどこすことによって、実軸あるいは虚軸を平行移動することができる。したがって、根の存在する範囲内を虚軸で掃引して根の実数部の値 $x_m (m=1, 2, \dots, k)$ を求める。別の表現すれば、その上に根が存在していて虚軸に平行な直線の方程式

$$z = x_m (m=1, 2, \dots, k) \quad (1)$$

を求める。

同様に実軸で掃引して根の虚数部の値 $y_n (n=1, 2, \dots, l)$ を求める。上と同じ表現をするならば、その上に根が存在していて実軸に平行な直線の方程式

$$z = iy_n (n=1, 2, \dots, l) \quad (2)$$

を求める。

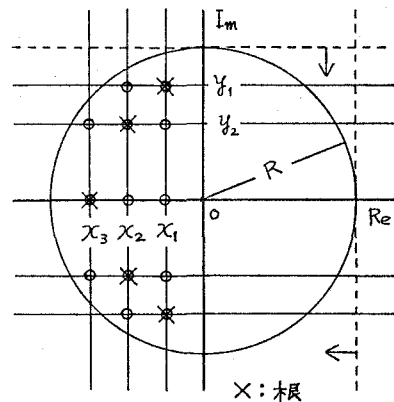


Fig. 1. 計算原理説明図

(1) 式と (2) 式の交点の中のいくつかが根であるから、それ等の交点の中、根の存在範囲内にある点 (Fig. 1 で○印の点) について根であるか否かを判定する。

2. 特 長

1. で説明したような原理に基づいた計算方法の特長として次のような点をあげることができる。

- (i) 収束性にも影響する根の第 1 近似値を与える必要がない。
- (ii) 重根や近接根があっても収束性には影響しない。
- (iii) 根の重複度が計算される。

III. 計算のアルゴリズム

1. 計算の手順

計算の手順は次の 5 段階に分割して考えることができる。

- (1) 第 1 段階 根の存在範囲を示す円の半径を計算する。
- (2) 第 2 段階 根の実数部の値 $x_m (m=1, 2, \dots, k)$ を計算する。
- (3) 第 3 段階 第 2 段階で求めた $x_m (m=1, 2, \dots, k)$ の中に実根そのものがあれば、それを選び出す。もし実根であれば、その重複度が計算される。
- (4) 第 4 段階 根の虚数部の値 $y_n (n=1, 2, \dots, l)$ を計算する。
- (5) 第 5 段階 (1) 式と (2) 式の交点の中、根の存在範囲内にある点の中から根 (複素根) を選び出す。根であれば、その重複度が計算される。

2. 各段階のアルゴリズム

2-1 第 1 段階 根の存在範囲の決定

n 次の方程式が (3) 式で与えられているとする。

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (3)$$

(ただし $a_0 \neq 0$)

根の存在範囲に関する定理⁸⁾によれば、(3) 式の全ての根は原点を中心として、(4) 式で表わされる半径の円の内側又は円周上に存在する。

$$R = 1 + \frac{A}{|a_0|} \quad (4)$$

ここで A は $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots, |a_n|$ の中最大の値を示す。

実際の計算では、(4) 式で表わされる R の値を目安として、計算の出発値および計算のきざみ幅を決めるようにしている。

2-2 第 2 段階 根の実数部の値の計算

根の配置が Fig. 2 のようになっている場合を例にとって説明する。

具体的な説明に入る前に (3) 式において $z=z+\varepsilon$ と変数変換した後の (5) 式について考えてみる。

$$f(z) = a_0(z+\varepsilon)^n + a_1(z+\varepsilon)^{n-1} + a_2(z+\varepsilon)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(z+\varepsilon) + a_n = 0 \quad (5)$$

根の存在する複素平面 (この場合は z -平面) において, (5) 式の根と (3) 式の根とを比較してみる。いま仮に ε を正の実数とすれば, (5) 式の根は (3) 式の根の全部を「右の方」へ ε だけ平行移動したものに等しい。しかし, ここではこの事実を別の見方をしてみる。すなわち (5) 式の意味は, 根の位置は (3) 式の根の位置そのまま動かず, その代わりに虚軸の位置が「左の方」へ ε だけ平行移動したと考える。そうすると ε の値を種々の値に変化させてやると, z -平面を虚軸で掃引するという概念が直感的に理解できて好都合なので, 以下の説明においては後者のような考え方を採用する。

次に具体的な計算方法について説明する。はじめに Fig. 2 のような根配置を表わす (3) 式に関し Hurwitz の安定判別法を適用したところ, 不安定根が存在しなかったとする。そこで Fig. 2 の (a) の位置にまで虚軸を平行移動した後の式について Hurwitz の安定判別法を適用しても, この例の場合にはまだ不安定根の存在は認められないはずである。そこでさらに虚軸を (b) の位置にまで平行移動した後の式について, Hurwitz の安定判別法を適用すれば, こんどは不安定根の存在は認められるであろう。このように不安定根の個数の変化に注目しながら, 虚軸の出発位置からの移動距離を与える ε の値を試行錯誤的に選んで, ε の変化幅 (計算のきざみ幅) および不安定根の個数の変化が丁度限界値を示すようにできたとすれば, 根の実数部の値 x_1 は, その時の ε の値を ε_1 として次のようにすることができる。

$x =$ 虚軸の出発位置 $-\varepsilon_1$

$$\text{虚軸の出発位置} = \begin{cases} 0 & \text{根が左半面だけに存在する場合} \\ R & \text{根が右半面にも存在する場合} \end{cases}$$

同様にして全ての根の実数部の値 $x_m (m=1, 2, \dots, k)$ が求められる。Fig. 3 に第 2 段階で求められる値を図示する。

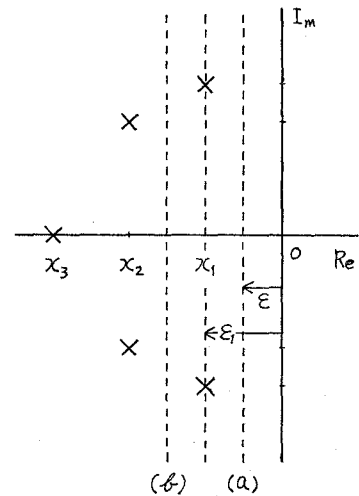


Fig. 2. 根の実数部の計算

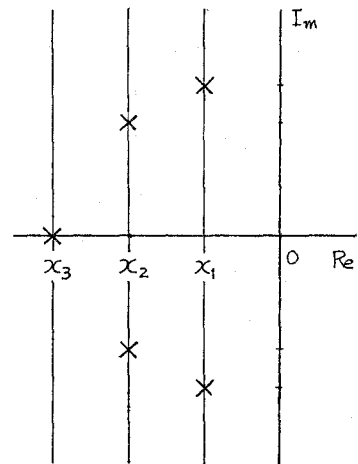


Fig. 3. 第 2 段階の計算結果

2-3 第3段階 実根の選出

第2段階で求めた根の実数部の値 $x_m (m=1, 2, \dots, k)$ の中には実根そのものも含まれているかも知れないので、それを調べ実根があれば求める。

ここで(3)式をサンプル値系の特性方程式とみなすことにする。(3)式において $z=\alpha z$ と変数変換する。

$$f(z) = a_0(\alpha z)^n + a_1(\alpha z)^{n-1} + a_2(\alpha z)^{n-2} + \dots + a_{n-1}(\alpha z) + a_n = 0 \quad (6)$$

(6)式の意味を考えるために(3)式の根と(6)式の根を比較してみる。(6)式の全ての根は、(3)式の全ての根の実数部および虚数部をそれぞれ $1/\alpha$ 倍したものに等しい。したがって Schur-Cohn の安定判別法を(6)式に適用することは、(3)式に Schur-Cohn の安定判別法を適用した場合に根の存在を議論する円(第1段階で求められる円とは異なる。Schur-Cohn の安定判別法において議論される円である。)は単位円ではなく、半径が α の円になったことに等しい。このような考え方を利用して、第2段階で求めた根の実数部の値、すなわち(1)式で表わされる各々の直線と実軸との交点が新しく原点になるように(3)式を変数変換し、そして新しい原点を中心として、打切りざみ幅と方程式の次数との関連を目安として決めた半径 α の円(便宜上判定円と呼ぶことにする)を考え、その判定円の内に存在する根の個数を Schur-Cohn の安定判別法を利用して数える。その結果判定円内の根の個数が0でなかったならば、その時の判定円の中心の座標の値を実根の値とし、判定円内の根の個数をもってその実根の重複度として

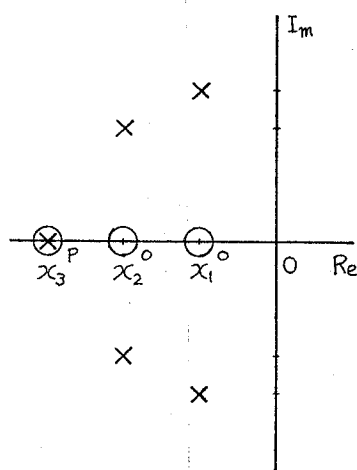


Fig. 4. 実根の選出および第3段階の計算結果

いる。又、もし判定円内の根の個数が0であったならば、その時の判定円の中心の座標の値は、実根ではなくて、複素根の実数部の値であることがわかる。Fig. 4に第3段階で求められる値を図示する。

2-4 第4段階 根の虚数部の値の計算

この段階での計算方法は第2段階のそれと同様である。

(3)式において $z=is$ (i =虚数単位) と変数変換すると一般に(7)式のような式になる。

$$f(s) = A_0s^n + A_1s^{n-1} + \dots + A_{n-1}s + A_n + i(B_0s^n + B_1s^{n-1} + \dots + B_{n-1}s + B_n) = 0 \quad (7)$$

そして(3)式の根と(7)式の根の位置関係は Fig. 5 のように(3)式の根(\times 印)を原点に関し時計方向に 90° 回転させてやると(7)式の根(\odot 印)に一致する。すなわち(3)式の根の正の虚数部が(7)式の根の正の実数部に対応する。したがって根の個数を数えるには判別法(3)を利用しながら

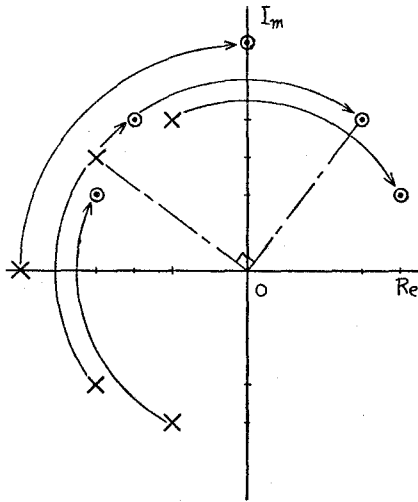


Fig. 5. (3) 式の根と (7) 式の根との位置関係

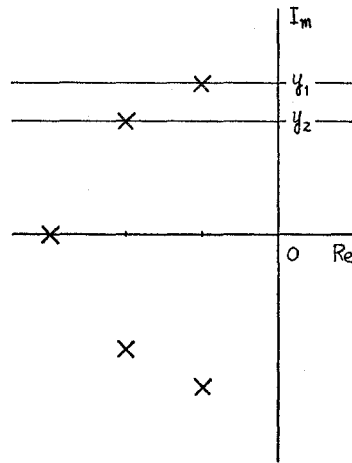


Fig. 6. 第4段階の計算結果

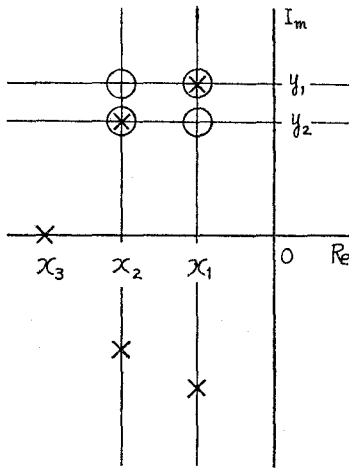


Fig. 7. 複素根の選出

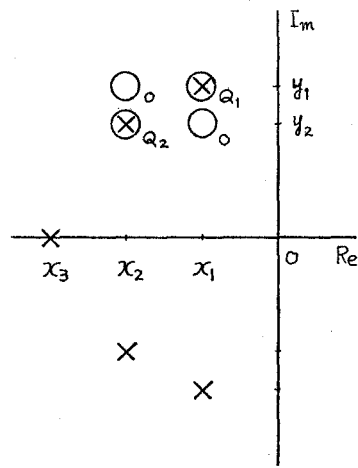


Fig. 8. 第5段階の計算結果

ら (7) 式に基づいて第2段階と同様の計算アルゴリズムで s -平面を虚軸で掃引して (7) 式の根の実数部の値を求めそれを (3) 式の根の虚数部の値とすることが出来る。つまり z -平面を実軸で掃引して (3) 式の根の虚数部の値を求めたのと同じ結果を得る。Fig. 6 に第4段階で求められる値を図示する。

2-5 第5段階 複素根の選出

この段階での計算原理は第3段階のそれと同様である。ここでは Fig. 7 に示すように (1) 式で表わされる直線と (2) 式で表わされる直線それぞれとの交点に判定円の中心を定める。(3) 式において、原点および実軸上を除く複素平面上の点に判定円の中心を定めるように変数変換

をすれば変換後の新しい方程式の係数は一般に (7) 式と同様に複素数となる。したがってそのような方程式に対して Schur-Cohn の安定判別法を利用して判定円の中に存在する根の個数を数えるのであるが、さらに $z=(w+1)/(w-1)$ と変数変換⁶⁾をすれば判定円の内部は w -平面の左半面に写像される。このようにすれば根本的な考えは Schur-Cohn の安定判別法に基づいて判定円内の根の個数について議論するのであるが実際の計算においては判別法 (3) を利用して根の個数を数えることができる。Fig. 8 に第 5 段階で求められる値を図示する。

III. 数値例と検討

北海道大学大型計算機センター, FACOM 230-60 を使用し, 以上で述べた方法で解いた場合と, FACOM 230-60, SSL の BAIR1S (Bairstow 法) で解いた場合の例を示す。

例 1.²⁾
$$z^{10} + 12z^9 + 68.75z^8 + 249.5z^7 + 637z^6 + 1187.5z^5 + 1613.75z^4 + 1553z^3 + 994.5z^2 + 373z + 60 = 0$$

真の根

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -1 \pm i1 \\ z_{3,4} &= -0.5 \pm i\sqrt{3.75} \\ z_{5,6} &= -2 \pm i1 \\ z_7 &= -0.5 \\ z_8 &= -1 \\ z_9 &= -1.5 \\ z_{10} &= -2 \end{aligned}$$

本方法

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -0.100001 E+01 \pm i0.999853 E+00 & [1] \\ z_{3,4} &= -0.500088 E+00 \pm i0.193641 E+01 & [1] \\ z_{5,6} &= -0.200003 E+01 \pm i0.999853 E+00 & [1] \\ z_7 &= -0.500088 E+00 & [1] \\ z_8 &= -0.100001 E+01 & [1] \\ z_9 &= -0.150010 E+01 & [1] \\ z_{10} &= -0.200003 E+01 & [1] \end{aligned}$$

(ただし [] 内の数値は根の重複度)

BAIR1S

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -0.999999 E+00 \pm i0.100000 E+01 \\ z_{3,4} &= -0.500000 E+00 \pm i0.193649 E+01 \\ z_{5,6} &= -0.200000 E+01 \pm i0.999996 E+00 \end{aligned}$$

$$z_7 = -0.499998 E+00 + i0.0$$

$$z_8 = -0.999994 E+00 + i0.0$$

$$z_9 = -0.150003 E+01 + i0.0$$

$$z_{10} = -0.199998 E+01 + i0.0$$

例 2. $z^5 - 15z^3 - 10z^2 + 60z + 72 = 0$

真の根

$$z_{1,2} = 3$$

$$z_{3,4,5} = -2$$

本方法

$$z_{1,2} = 0.299957 E+01 \quad [2]$$

$$z_{3,4,5} = -0.200020 E+01 \quad [3]$$

BAIR1S

$$z_1 = 0.300019 E+01 + i0.0$$

$$z_2 = 0.299981 E+01 + i0.0$$

$$z_3 = -0.199575 E+01 + i0.0$$

$$z_{4,5} = -0.200213 E+01 \pm i0.368713 E-02$$

例 3. $z^5 - 6z^4 + 14z^3 - 20z^2 + 24z - 16 = 0$

真の根

$$z_{1,2,3} = 2$$

$$z_{4,6} = \pm i\sqrt{2}$$

本方法

$$z_{1,2,3} = 0.199975 E+01 \quad [3]$$

$$z_{4,5} = -0.346945 E-17 \pm i0.141420 E+01 \quad [1]$$

BAIR1S

求まらず

例 4. $z^5 + 10z^4 + 40z^3 + 80z^2 + 80z + 32 = 0$

真の根

$$z_{1,2,3,4,5} = -2$$

本方法

$$z_{1,2,3,4,5} = -0.200151 E+01 \quad [5]$$

BAIR1S

$$z_{1,2} = -0.204624 E+01 \pm i0.364682 E-01$$

$$z_{3,4} = -0.197940E+01 \pm i0.504852E-01$$

$$z_5 = -0.194872E+01 + i0.0$$

実際には特性方程式として上の例のようなものがあるかどうかは不明であるが、かなり極端な例について数値実験を試みた。以上の例で、本方法は打ち切りきざみ幅 10^{-3} , BAIR1S では収束判定値は標準値とされている 10^{-5} で計算した結果である。この結果から、本方法は重根がある場合や根の重複度を求めたい場合には特に有効であり、精度についてもこの打ち切りきざみ幅 10^{-3} ではほぼ充分な結果が得られている。

IV. 結 言

以上、主として制御の分野で利用される、各種の安定判別法を利用した特性根の計算方法について、原理、計算アルゴリズム、および数値例について述べた。

数値例にみられるように、本方法によれば他の方法と比較して、かなり重複度が高い根をもつ方程式についても満足できる解が得られた。

本方法では原理的には打ち切りきざみ幅を r とすれば判定円の直径は r とできるのであるが、実際には方程式の次数が高い場合は特に計算途中の過程で必ず通る行列式の値の計算段階での 0 判定の基準と密接な関連があるので、判定円の直径をあまり小さく選ぶことはできない。したがって判定円の直径より近接している根は重複根とみなされる。

今後に残された問題としては、計算の打ち切りきざみ幅と根の精度との関係および方程式の次数と判定円の直径の大きさとの関係などについて検討する必要がある。

またこの計算方法はアルゴリズムを少し修正することによって複素係数代数方程式の解法に利用することが可能である。

おわりに、日頃御指導いただく本学北村正一教授に深謝いたします。

(昭和 49 年 5 月 20 日受理)

参 考 文 献

- 1) 山内二郎他共編：数理科学シリーズ I. 電子計算機のための数値計算法 I, 培風館, 44-49.
- 2) C. F. Chen and N. R. Strader: A normalized multidimensional Newton-Raphson method, INT. J. CONTROL, 1970, Vol. 12, No. 2, 273-279.
- 3) 市川邦彦：自動制御の理論と演習, 産業図書, 99-101.
- 4) A. B. Macnee: Polynomial Factorization, IEEE Trans. on Circuit Theory, September 1967, 338-340.
- 5) 伊沢計介：自動制御入門, オーム社, 130-131.
- 6) E. J. Jury 著・森 政弘他共訳：サンプル値制御, 丸善, 30-34.
- 7) ア・ペ・ミーシナ他共著・麻嶋格次郎訳：現代応用数学ハンドブック ④, 高等代数, 総合図書, 190-191.
- 8) ア・ペ・ドモリヤード著・筒井孝胤訳：基礎数学 3, 代数 I, 東京図書, 158-159.
- 9) 上記 7): 188-189.

付録 1. Hurwitz の安定判別法 (右半面にある根の個数の数え方について)

特性方程式を (付 1) 式とする。

$$f(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \quad (\text{付 1})$$

(付 1) 式について Hurwitz の行列式 H_i ($i=1, 2, \dots, n$) を作る。

$$H_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2i-3} \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2i-4} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_i \end{vmatrix} \quad (a_k \text{ は } k < 0, k > n \text{ のときは } 0 \text{ とする})$$

もしすべての H_i が 0 と異なるならば (付 1) 式の根で右半面にあるものの数 t は数列

$$a_0, H_1, H_2/H_1, H_3/H_2, \dots, H_n/H_{n-1} \quad (\text{付 2})$$

における符号の変化の回数に等しい。 H_i の中にいくつか 0 になるものが含まれている場合は文献 9) を参照のこと。

付録 2. Schur-Cohn の安定判別法 (単位円内の根の個数の数え方について)

サンプル値系の特性方程式を (付 3) 式とする。

$$F^*(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0 \quad (\text{付 3})$$

(付 3) 式について行列式 D_k ($k=1, 2, \dots, n$) を作る。

$$D_k = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+1} \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n & \cdots & a_{n-k+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k-1} & a_{k-2} & a_{k-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ \bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & a_0 & \bar{a}_0 & \bar{a}_1 & \cdots & \bar{a}_{k-1} \\ \bar{a}_{n-1} & \bar{a}_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{a}_0 & \cdots & \bar{a}_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{a}_{n-k+1} & \bar{a}_{n-k+2} & \bar{a}_{n-k+3} & \cdots & \bar{a}_n & 0 & 0 & \cdots & \bar{a}_0 \end{vmatrix} \quad (\bar{a}_k = a_k \text{ の共役数})$$

D_k が 0 でなければ単位円内の根の数 p は数列

$$1, D_1, D_2, D_3, \dots, D_n \quad (\text{付 4})$$

の符号の変化の回数に等しい。

付録 3. 判 別 法 (3)

(付 1) 式が複素係数の場合, (付 1) 式の根の中右半面にあるものの数を定めるには $s=iy$ と変数変換する。その結果 (付 5) 式になる。

$$f(iy) = c_0 y^n + c_1 y^{n-1} + \cdots + c_n + i(d_0 y^n + d_1 y^{n-1} + \cdots + d_n) \quad (\text{付 5})$$

(もし $d_0 \neq 0$ ならば次の $2n$ 次の行列式 $A_i (i=2, 4, \dots, 2n)$ を作る。

$$A_i = \begin{vmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & \cdots & d_n & 0 & \cdots & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_0 & d_1 & \cdots & d_{n-1} & d_n & \cdots & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_n & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

もし $d_0 = 0$ ならば $f(iy)$ の代りに $if(iy)$ を作りそれに対応する行列式 A_i を作る。もし $A_{2n} \neq 0$ ならば根の中右半面にある根の数 q は数列

$$1, A_2, A_4, \dots, A_{2n} \quad (\text{付 6})$$

における符号の変化の回数に等しい。 A_i の中に 0 になるものが含まれている場合は文献 7) を参照のこと。